

Романюк Г.О., Ряшко Л.Б.

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА С НАСЫЩЕНИЕМ

Аннотация. Рассматривается стохастическая дискретная популяционная модель с насыщением второго типа по Холлингу. Исследуются аттракторы и бифуркации детерминированной системы. Изучаются динамические режимы модели в присутствии случайных возмущений. Для параметрического анализа используется техника стохастической чувствительности и метод доверительных областей.

Ключевые слова: Популяционная динамика, случайные возмущения, стохастическая чувствительность, доверительные эллипсы.

Abstract. We consider a stochastic discrete-time Holling's type II predator-prey system. The attractors and bifurcations of a deterministic system are investigated. Dynamic regimes of the model are studied in the presence of random perturbations. Parametric analysis uses the stochastic sensitivity technique and method of confidence areas.

Keywords: discrete-time predator-prey system, random perturbations, stochastic sensitivity analysis

Введение

В исследованиях динамики взаимодействующих популяций в последнее время начали широко использоваться дискретные нелинейные модели. Дискретные динамические модели даже малой размерности позволяют воспроизводить широкое разнообразие как регулярных, так и хаотических режимов поведения. Классическим примером здесь служит известная логистическая модель.

В данной работе исследуется дискретная популяционная система хищник-жертва с насыщением второго типа по Холлингу. В первой части исследуется детерминированная система, обсуждаются ее аттракторы и бифуркации. Во второй части исследуется влияние случайных возмущений. Здесь наряду с прямым численным моделированием решений используется новый подход, основанный на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных областей.

Детерминированная модель

Рассматривается детерминированная система:

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) - \frac{bx_t y_t}{1 + \varepsilon x_t} \\ y_{t+1} = \frac{dx_t y_t}{1 + \varepsilon x_t} \end{cases}$$

Здесь x_t, y_t – численность жертв и хищников, параметр a – коэффициент демографического роста, b, d – параметры, определяющие взаимное влияние популяций друг на друга, ε – коэффициент, определяющий степень насыщения. Все параметры системы – положительные.

Система имеет три равновесия:

$$F_1 = (0, 0),$$

$$F_2 = \left(\frac{a-1}{a}, 0\right),$$

$$F_3 = \left(\frac{1}{d-\varepsilon}, \frac{d}{d-\varepsilon} \left(\frac{a}{b} \left(1 - \frac{1}{d-\varepsilon}\right) - \frac{1}{b}\right)\right).$$

Равновесие F_2 имеет смысл при $a > 1$, а невырожденное равновесие F_3 – при следующих условиях: $a > 1$ и $d \geq \varepsilon + \frac{a}{a-1}$.

Чтобы проверить устойчивость равновесий, найдем матрицу Якоби системы:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a(1 - 2x) - \frac{by}{(1+\varepsilon x)^2} & \frac{bx}{1+\varepsilon x} \\ \frac{dy}{(1+\varepsilon x)^2} & \frac{dx}{1+\varepsilon x} \end{pmatrix}.$$

Вычислив ее собственные числа в точках равновесия, найдем области устойчивости. Для равновесий справедливо:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a.$$

Равновесие F_1 устойчиво при $a < 1$. Этому условию соответствует вымирание обеих популяций.

$$J\left(\frac{a-1}{a}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 - a & \frac{b(1-a)}{a+\varepsilon(a-1)} \\ 0 & \frac{d(a-1)}{a+\varepsilon(a-1)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1 = 2 - a, \lambda_2 = \frac{d(a-1)}{a+\varepsilon(a-1)}.$$

Равновесие F_2 устойчиво при $1 < a < 3$ и $d < \varepsilon + \frac{a}{a-1}$. Этому условию соответствует вымирание хищников и стабилизация популяции жертв.

Для нетривиального равновесия F_3 , наиболее интересного в биологическом смысле, матрица Якоби имеет вид:

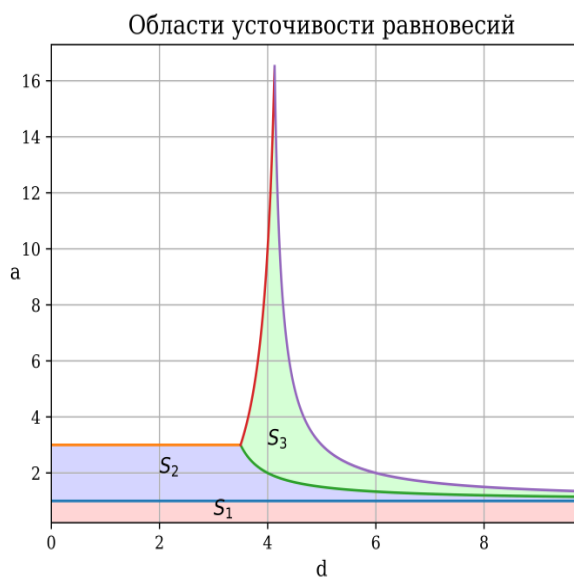
$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a\left(1 - \frac{2}{d-\varepsilon}\right) - \frac{d-\varepsilon}{d}\left(a\left(1 - \frac{1}{d-\varepsilon}\right) - 1\right) & -\frac{b}{d} \\ \frac{d-\varepsilon}{b}\left(a\left(1 - \frac{1}{d-\varepsilon}\right) - 1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Равновесие F_3 устойчиво при выполнении следующих условий:

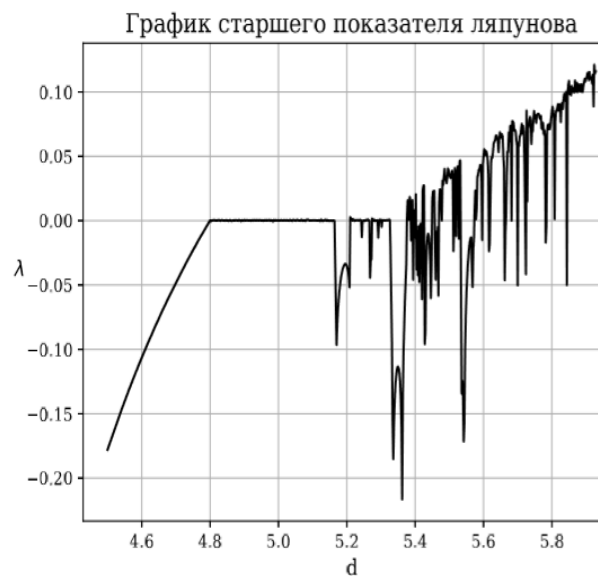
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon + \frac{3}{2} < d < \frac{1}{8}(4\varepsilon + 9 + \sqrt{16\varepsilon^2 + 56\varepsilon + 81}), \\ \frac{d-\varepsilon}{d-\varepsilon-1} < a < \frac{(d-\varepsilon)(\varepsilon-3d)}{2d(d-\varepsilon-2) - (d-\varepsilon)(d-\varepsilon-1)}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{8}(4\varepsilon + 9 + \sqrt{16\varepsilon^2 + 56\varepsilon + 81}), \\ \frac{d-\varepsilon}{d-\varepsilon-1} < a < \frac{(d-\varepsilon)(\varepsilon-3d)}{2d(d-\varepsilon-2) - (d-\varepsilon)(d-\varepsilon-1)} = \frac{d-\varepsilon}{d-\varepsilon-2}, \\ \left\{ \begin{array}{l} d > \frac{1}{8}(4\varepsilon + 9 + \sqrt{16\varepsilon^2 + 56\varepsilon + 81}), \\ \frac{d-\varepsilon}{d-\varepsilon-1} < a < \frac{d-\varepsilon}{d-\varepsilon-2}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Зафиксируем значения $b = 1$, $\varepsilon = 2$. На Рисунке 1а показаны области устойчивости S_i равновесий F_i . На Рисунке 1б приведен график старшего показателя Ляпунова λ . Отрицательные значения λ соответствуют регулярным аттракторам, а положительные – хаотическим. Эти аттракторы представлены на Рисунке 1в.

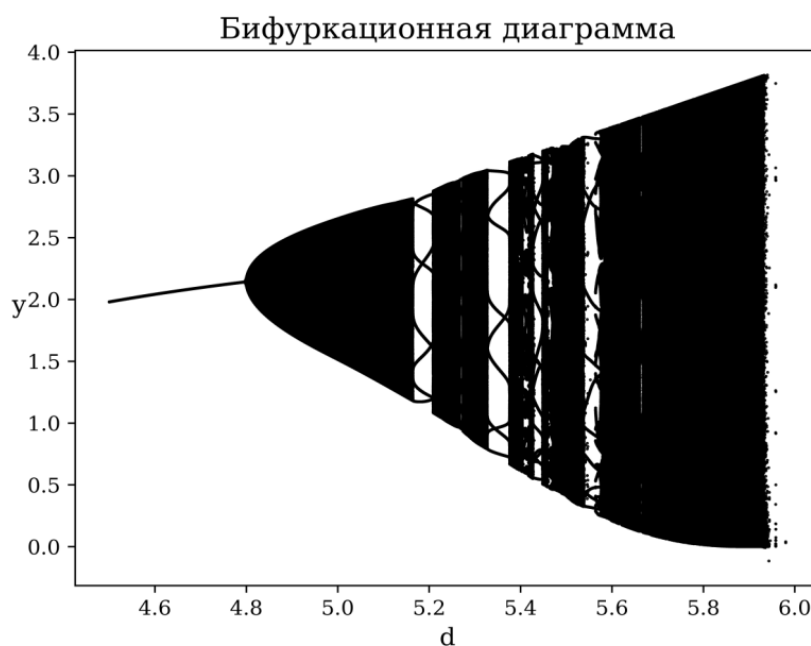
При увеличении параметра d равновесие F_3 теряет устойчивость в точке бифуркации Неймарка – Сакера. При этом вокруг потерявшего устойчивость равновесия возникает устойчивая замкнутая инвариантная кривая (ЗИК). При дальнейшем увеличении параметра d этот аттрактор теряет устойчивость и преобразуется в дискретный 8-цикл.



а)



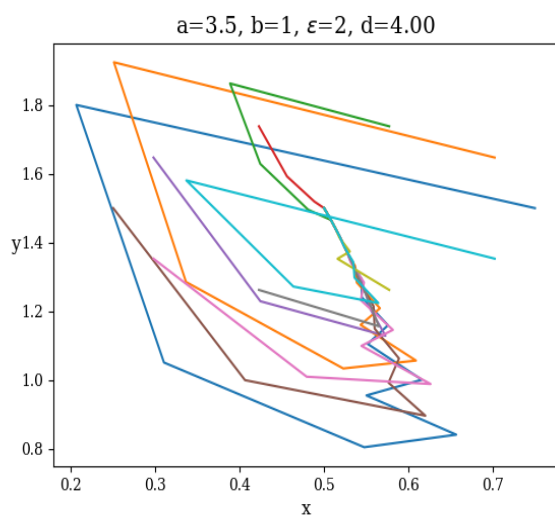
б)



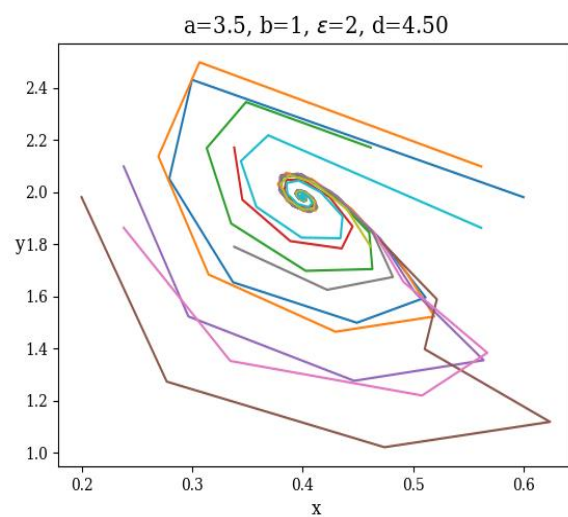
в)

Рисунок 1 – Устойчивость и бифуркации детерминированной системы:
а) области устойчивости равновесий; б) график старшего показателя
Ляпунова для $a = 3.5$; в) бифуркационная диаграмма для $a = 3.5$.

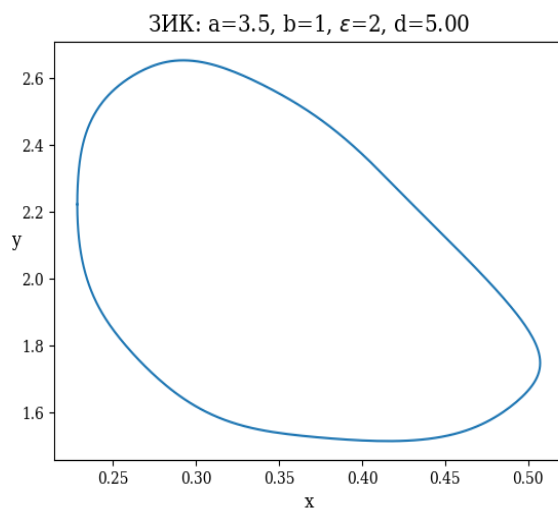
Эти преобразования также видны на графике старшего показателя Ляпунова (Рисунок 1б). Нулевые значения показателя соответствуют области ЗИК, а положительные в правой части графика – хаотическому режиму.



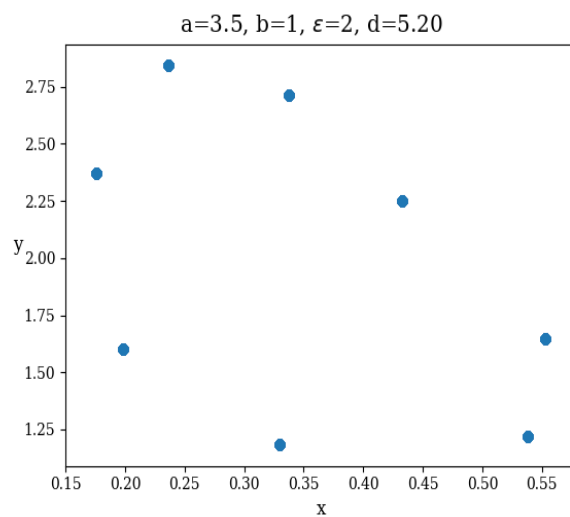
а)



б)

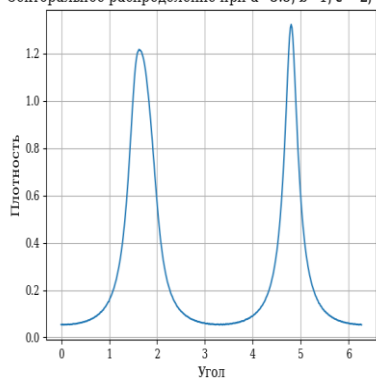


в)



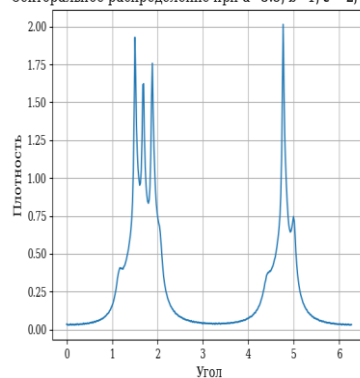
г)

Секторальное распределение при $a=3.5, b=1, \varepsilon=2, d=4.9$



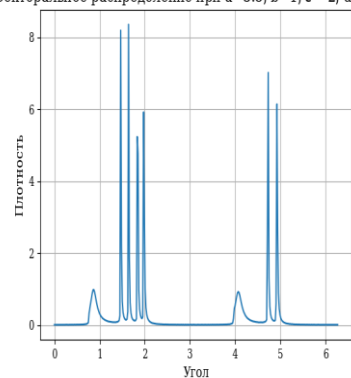
д)

Секторальное распределение при $a=3.5, b=1, \varepsilon=2, d=5.12$



е)

Секторальное распределение при $a=3.5, b=1, \varepsilon=2, d=5.16$



ж)

Рисунок 2 – а),б),в),г) Фазовые портреты детерминированной системы; д),е),ж) секторальное распределение точек на замкнутой инвариантной кривой при различных значениях параметров.

На Рисунке 2 представлены типичные фазовые портреты. В верхней части рисунка представлены типичные фазовые портреты вокруг устойчивого равновесия F_3 . На Рисунке 2а изображен устойчивый узел, а на Рисунке 2б – устойчивый фокус. На Рисунке 2в показана устойчивая замкнутая инвариантная кривая, а на Рисунке 2г – 8-цикл.

Чтобы исследовать преобразование замкнутой инвариантной кривой в 8-цикл, построена функция плотности распределения состояний на ЗИКе при приближении параметра к бифуркационному значению.

На Рисунке 2д показано равномерное распределение точек на ЗИКе. Пики наблюдаются за счет формы ЗИК и особенностей метода. На Рисунке 2е видно, как распределение перестает быть равномерным, что проявляется в искривлении формы вершины левого пика. При увеличении параметра d отчетливо проступают новые пики плотности (Рисунок 2ж), которые при прохождении бифуркационного значения становятся дельта-образными в точках устойчивого 8-цикла. При дальнейшем переходе от дискретного цикла к замкнутой инвариантной кривой наблюдается похожий сценарий.

Подробнее детерминированная модель рассмотрена в работах [1, 2].

Стохастическая модель

Учитывая воздействие случайных возмущений в системе (1), получим стохастическую модель

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) - \frac{bx_t y_t}{1 + \varepsilon x_t} + \delta \xi_{1,t}, \\ y_{t+1} = \frac{dx_t y_t}{1 + \varepsilon x_t} + \delta \xi_{2,t}. \end{cases}$$

Здесь $\xi_{1,2}$ – независимые нормально распределенные случайные процессы с параметрами 0, 1. Параметр $\delta \geq 0$ отвечает за интенсивность случайных возмущений.

Из-за воздействия случайных возмущений траектории уходят с устойчивого аттрактора и образуют вокруг него облако случайных состояний. На бифуркационной диаграмме этот эффект проявляется как «размытие» тонких структур аттракторов, особенно сильное вблизи бифуркационных значений параметра.

Если рассматривать график секторального распределения, можно отметить, что стирается четкая граница между замкнутой инвариантной кривой и дискретным циклом, поскольку под действием шума, вокруг точек

дискретного цикла образуются облака состояний, пик плотности размывается, делая график похожим на его аналог для ЗИК.

Исследование стохастической динамики методом прямого численного моделирования

Рассмотрим, как шум действует на различные аттракторы системы. Проведем прямое компьютерное моделирование; переходный период пропущен.

На Рисунке 3 разным цветом показаны облака случайных состояний для различной интенсивности шума, красным отмечены точки детерминированного аттрактора.

На рисунке 3а показаны случайные состояния вокруг равновесия F_3 при разных значениях интенсивности шума: для $\delta = 0.005$ (оранжевый), $\delta = 0.001$ (синий). Можно отметить, что облако состояний вытянуто по вертикали.

На рисунке 3б показаны случайные состояния вокруг замкнутой инвариантной кривой. Ширина облака изменяется при движении по ЗИК, среднее отклонение состояний от детерминированного аттрактора значительно увеличивается в нижней части аттрактора.

На рисунке 3с зеленый цвет соответствует $\delta = 0.001$, а синий $\delta = 0.005$. Вокруг точек дискретного цикла возникают облака состояний, которые различны по размеру и конфигурации. Можно отметить распад дискретного цикла под воздействием случайных возмущений при высоком уровне шума.

Исследование методом доверительных эллипсов

Для исследования разброса случайных состояний используется метод функции стохастической чувствительности [3]. Практическое применение данного метода разобрано в [4-6]. Матрица стохастической чувствительности, аппроксимирующая дисперсию этого разброса, находится из решения соответствующего матричного уравнения. Используя собственные числа этой матрицы стохастической чувствительности, можно построить доверительные эллипсы. Эти эллипсы представлены на Рисунке 3.

В случае равновесия (Рисунок 3г) построенный эллипс (доверительная вероятность 0.99, интенсивность шума $\delta = 0.001$) хорошо отражает конфигурацию и размер облака случайных состояний.

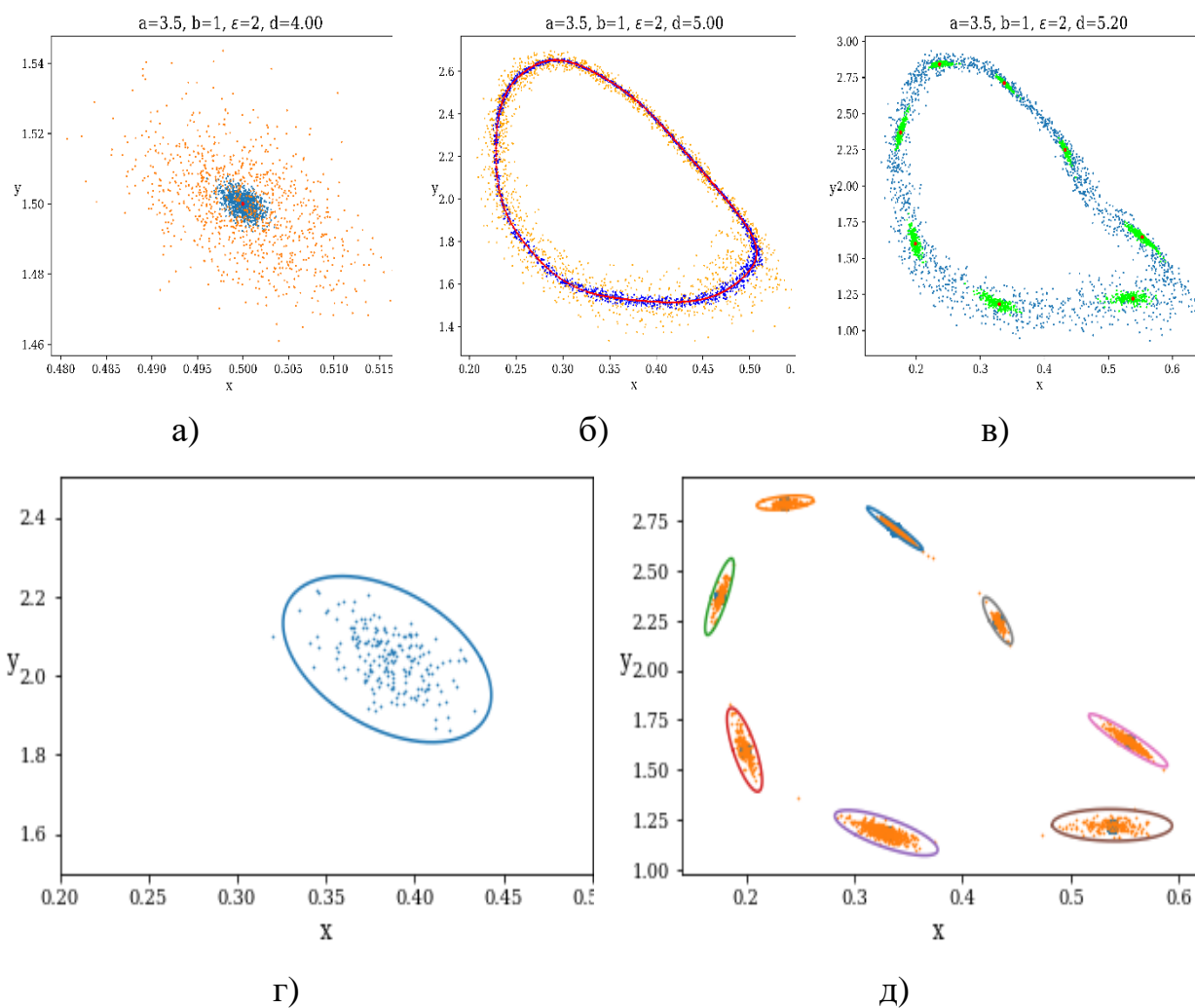


Рисунок 3 – Облака состояний для устойчивого равновесия (а), замкнутой инвариантной кривой (б), дискретного 8-цикла (в). Доверительные эллипсы показаны для равновесия (г) и дискретного цикла (д).

На Рисунке 3д для элементов дискретного цикла были построены доверительные эллипсы (доверительная вероятность 0.99, интенсивность шума $\delta = 0.001$), образующие доверительную область. При усилении шума происходит наложение эллипсов друг на друга, что отражает трансформацию стохастического цикла в стохастический ЗИК.

Данный метод можно применять и для анализа ЗИК [7].

Заключение

В работе рассмотрена дискретная популяционная модель с насыщением. В выбранном сечении пространства параметров изучены основные аттракторы, построены типичные фазовые портреты. Исследована

стохастическая чувствительность данных аттракторов, построены доверительные эллипсы.

Библиографический список

1. Ghaziani R. K. Resonance and bifurcation in a discrete-time predator-prey system with Holling functional response / R. K. Ghaziani, W. Govaerts, C. Sonck // Nonlinear Analysis-Real World Applications. – 2012. – Vol. 13, I. 3. – P. 1451–1465.
2. Chaotic dynamics of a discrete prey–predator model with Holling type. Part 2 / H. N. Agiza [et al.] // Nonlinear Analysis-Real World Applications. – 2009. – Vol. 10, I. 1. – P.116–129.
3. Bashkirtseva I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. – 2010. – Vol. 17, I. 4. – P.501–515.
4. Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters, Section. A: General, Atomic and Solid State Physics. – 2014. – Vol. 378, I. 48. – P. 3600–3606.
5. Bashkirtseva I. Analysis of noise-induced transitions in a generalized logistic model with delay near Neimark-Sacker bifurcation [Electronic resource] / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – Vol. 50, I. 27. – P. 275102. – Mode of access: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa734b/>.
6. Bashkirtseva I. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect [Electronic resource] / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos. – 2011. – Vol. 21, I. 4. – P. 047514. – Mode of access: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3647316>.
7. Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2014. – Vol. 410. – P. 236–243.